Domácí úkol ze cv. 11

a) globální extrémy a funkce, definivané implicitně:

1. Vyšetřete globální extrémy funkce

$$f(x,y)=x^2-xy+y^2$$

na množině $M=\{[x,y];|x|+|y|\le 1\}$

2. Vyšetřete lokální i globální extrémy funkce f na množině M, je-li

$$f(x,y,z)=x+y+z$$
$$M=\{[x,y,z]\in R^3;\ x^2+y^2\le z<1\}\ .$$

3. Vyšetřete lokální i globální extrémy funkce f na množině M, je-li

$$f(x,y,z)=x.y+z^2$$
$$M=\{[x,y,z]\in R^3;\ x^2+y^2+z^2=1\wedge x+y+z=0\}\ .$$

4. a) Ukažte, že rovnicí

(*) $$x^2-y^3+x^2y-1=0$$

a podmínkou $f(1)=0$ je definována v okolí bodu $(1,0)$ implicitní funkce $y=f(x)$.

b) Vypočítejte $f'(1)$ a $f''(1)$.

c) Napište rovnici tečny ke křivce, dané rovnicí (*), v bodě $(1,0)$.

d) Aproximujte funkci $f(x)$ v okolí bodu $x_0=1$ Taylorovým polynomem 2.stupně.

5. a) Je dána rovnice

$$e^{z-2x}-xz+2yz-2y-xy^2=0\ .$$

Ukažte, že touto rovnicí je definována implicitně funkce $z=f(x,y)\in C^2(U(1,1))$, pro kterou je $f(1,1)=2$.

b) Určete $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,1)$.

c) Pomocí lineární aproximace určete přibližně hodnoty $f(x,y)$ v okolí bodu $(1,1)$.

6. a) Nechť funkce $F(x,y,z)$ má spojité parciální derivace prvního řádu v okolí bodu (x_0,y_0,z_0) a nechť platí $F(x_0,y_0,z_0)=0$. Odvoďte rovnici tečné roviny k ploše, dané rovnicí $F(x,y,z)=0$, v bodě (x_0,y_0,z_0) za předpokladu, že aspoň jedna z parciálních derivací 1.řádu funkce F je v bodě (x_0,y_0,z_0) nenulová.

b) Napište rovnici tečné roviny a vektorovou rovnici normály v bodě (1, 2, -1) k ploše, dané rovnicí

$$x^3+y^3+z^3+xyz-6=0\ .$$

b) metrika:

1. V metrickém prostoru R^2 s euklidovskou metrikou najděte vzdálenost bodu $A\,(1,4)$ od množiny $M \subset R^2$, kde $M = \{(x,y);\ y^2 = 2x, x \in R\}$.

2. a) Uveďte definici kompaktního metrického prostoru (resp. kompaktní množiny v metrickém prostoru).
   b) Dokažte, nebo ukažte, že neplatí :
   (i) sjednocení dvou kompaktních množin je kompaktní množina;
   (ii) rozdíl dvou kompaktních množin je kompaktní množina ;
   (iii) každá konečná podmnožina metrického prostoru je kompaktní .

3. Rozhodněte, zda množina $M \subset R^3$ je otevřená, resp. uzavřená, resp. kompaktní, je-li
   a) $M = \{(x,y,z) \in R^3;\ 2 \le xyz \le 4\}$
   b) $M = \{(x,y,z) \in R^3;\ 1 < x^3 + y^3 + z^3 \le 2\}$

4. a) Uveďte definici konvergentní, resp. cauchyovské posloupnosti v metrickém prostoru.
   b) Dokažte, nebo ukažte, že neplatí :
   V prostoru $(R^n, d_{\max})$ ($n \in N$) je každá cauchyovská posloupnost konvergentní.
   (Pro $x, y \in R^n$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, je $d_{\max}(x,y) = \max_i |x_i - y_i|$.)
   c) (trošku těžší úloha) Pokuste se o totéž v metrickém prostoru (l_∞, d_∞).
   (Prostor (l_∞, d_∞) je prostor omezených posloupností , pro $x, y \in l_\infty$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)$ je $d_\infty(x,y) = \sup_{i \in N} |x_i - y_i|$.)